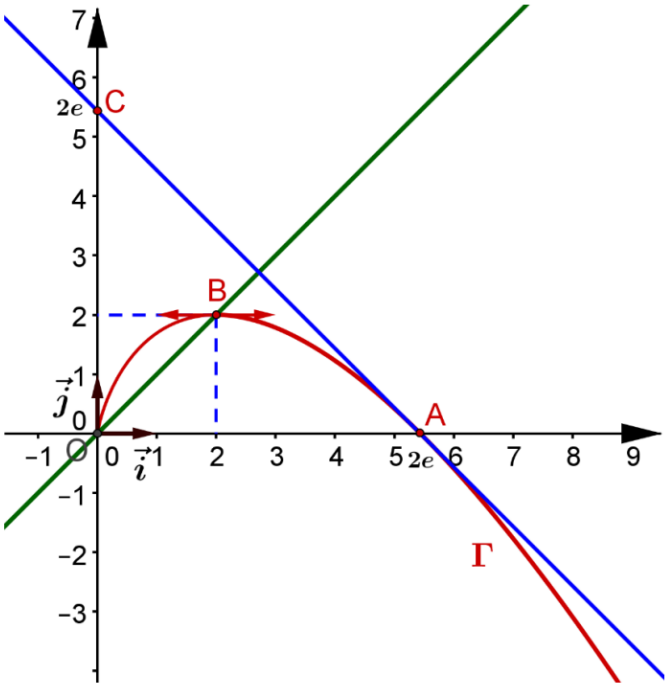
EXERCICE N°1 :	PRINCIPALE	40'	5 points

Dans le graphique ci-dessous :

Γ est la courbe représentative dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et dérivables sur $[0\ ;+\infty[$

- Les points O, A et B appartiennent à Γ.
- La droite (AC) est la tangente à f au point A.
- Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1°) Par une lecture graphique :

a) Déterminer $f(0), f(2), f(2e), f'(2)$ et $f'(2e)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[2\ ;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2°) On admet que g est définie par :

$$g(x) = x\,(1+\ln 2-\ln x)\text{, pour tout } x \geq 2.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et par $\mathscr{C}'$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Tracer, les courbe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

3°) Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan limitée par les axes $(O;\vec{i})$ et $(O;\vec{j})$ et les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

a) Hachurer $\mathscr{D}$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_2^{2e} g(x)\,dx = e^2-3$.

c) Calculer l'aire de $\mathscr{D}$.

: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°2 :	PRINCIPALE	40'	4 points	

On considére la suite (U_n) définie sur IN^* par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} + ... + (-1)^n \frac{n}{e^n}$.

1°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $(2n+2) - e(2n+1) < 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2) - e(2n+1)\right].$$

En déduire que la suite $(U_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

2°) Montrer que la suite $(U_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

3°) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{2n} > U_{2n+1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_{2n} - U_{2n+1})$.

4°) Montrer que la suite (U_n) convergente vers un réel α et que $U_3 < \alpha < U_2$.

EXERCICE N°3 :	CONTROLE	35'	4 points	

On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$.

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n).

3°) Calculer I_1, I_2 et I_4.

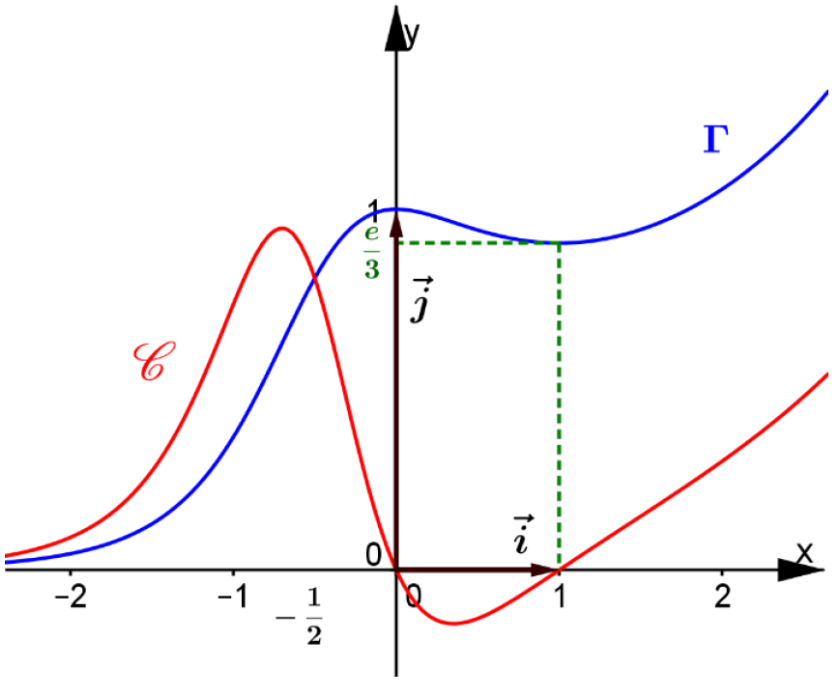
: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°4 :	CONTROLE	50'	6 points	

Dans le graphique ci-contre : $\mathscr{C}$ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction f dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f'.

Chacune des deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ possède :

- une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.



1°) Par une lecture graphique :

a) Déterminer, parmi les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, celle qui représente la fonction f'.

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2°) On admet que la fonction f est définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x+x^2}$.

a) Calculer $f'(x)$, pour $x \in IR$.

b) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : $f(x)-f'(x)=f(x).\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

c) En déduire les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

d) Montrer que pour tout $x \geq -\dfrac{1}{2}$ on a: $f(x)-f'(x) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ \dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

3°) Soit t un réel supérieur ou égal à 1.

On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ et les droites d'équations : $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=t$.

a) Montrer que $\mathcal{A}(t) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(1+t+t^2\right)-\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal{A}(t)$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com
BAC